සංයුක්ත ගණිතය

13 ශ්‍රේණිය

ඒකක පරීක්ෂණය - 06

ලකුණු දීමේ පටිපාටිය.

(01) $x^2+y^2-10x+\lambda(x^2+y^2-4x-8y-30)=0$, $(15,-5)$ සෘජු කරයි. (5)

$\therefore 225+25-150+\lambda(225+25-60+40-30)=0$ (5)

$200\lambda=-100$

$\lambda=-1/2$ (5)

අදාළ වෘත්තය $x^2+y^2-10x-\frac{1}{2}(x^2+y^2-4x-8y-30)=0$ (5)

$2x^2+2y^2-10x-x^2-y^2+4x+8y+30=0$

$x^2+y^2-16x+8y+30=0$ (5) **25**

$S_2 \equiv x^2+y^2-4x-8y-30=0$ හා $g_2=-2$, $f_2=-4$, $c_2=-30$

$S_3 = x^2+y^2-16x+8y+30=0$ සලකමු. $g_3=-8$, $f_3=-4$, $c_3=30$

$2(g_1g_2+f_1f_2)=2(16+(-16))=0$ (5)

$c_1+c_2=-30+30=0$ (5)

$\therefore 2(g_1g_2+f_1f_2)=c_1+c_2$ (5)

$\therefore S_2=0$ හා $S_3=0$ වෘත්ත ඡේදනය වේ. (5) **25**

පොදු ජ්‍යාය : $S_2-S_3=0$ (5) $S_1-S_2=0$ (5)

$12x-16y-60=0$ $-6x+8y+30=0$

$3x-4y-15=0$ (5) $3x-4y-15=0$ (5)

$\therefore$ වෘත්ත නුවේ පොදු ජ්‍යාය : $3x-4y-15=0$ වේ (5)

$S_1=0$ හි කේන්ද්‍රය $(5,0)$ වේ. (5)

$3(5)-4(0)-15=0$ (5) $\Rightarrow (5,0)$, $3x-4y-15=0$ මත වේ. (5)

$\therefore$ පොදු ජ්‍යාය $S_1=0$ හි විශේකම්භය වේ. (5)

40

Scanned by CamScanner

(02) $S = x^2+y^2-2x-6y+1 = 0$

කේන්ද්‍රය $(1,3)$ ⑤ අරය $= \sqrt{1^2+3^2-1} = 3$ ⑤

$S' = 3x^2+3y^2-21x+24y+35 = 0$

$\Rightarrow x^2+y^2-7x+\frac{2}{3}y+\frac{35}{3} = 0$ ⑤

කේන්ද්‍රය $(7/2, -1/3)$ ⑤ අරය $= \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{35}{3}} = \sqrt{\frac{49}{4}+\frac{1}{9}-\frac{35}{3}}$

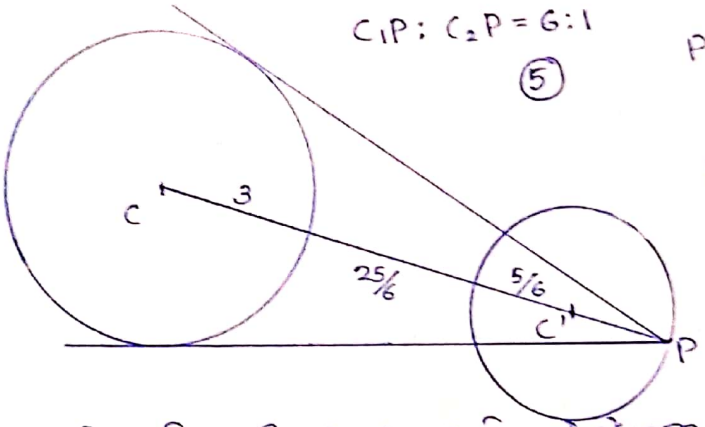
$= \sqrt{\frac{441+4-420}{36}} = \frac{5}{6}$ ⑤

කේන්ද්‍ර අතර දුර CC' ⑤

$CC'^2 = \left(1-\frac{7}{2}\right)^2+\left(3-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^2 = \frac{25}{4}+\frac{100}{9} = \frac{225+400}{36}$

$CC' = \frac{25}{6}$ ⑤ , $\frac{25}{6} > 3+\frac{5}{6}$ ⑤

∴ වෘත්ත දෙක බාහිරින් ස්පර්ශයි ⑤ [45]



$C_1P : C_2P = 6:1$ ⑤

$P \equiv \left[\frac{6(7/2)-1(1)}{6-1}, \frac{6(-1/3)-1(3)}{6-1}\right]$ ⑤

$P \equiv [4,1]$ ⑤ [15]

P හරහා $S=0$ ට ඇඳි ස්පර්ශක

$y-(-1) = m(x-4)$ ⑤

$mx-y-4m-1 = 0$

$\frac{|m(1)-3-4m-1|}{\sqrt{m^2+1}} = 3$ ⑤

$|-(3m+4)| = 3\sqrt{m^2+1}$ ⑤

$9m^2+24m+16 = 9m^2+9$

$24m = -7$

$m = -7/24$ ⑤

m සඳහා එක් අගයක් පමණි. එක් ස්පර්ශකයක්

$x = 4$ වන අතර අනන්‍ය ⑤

$y-(-1) = -\frac{7}{24}(x-4) \Rightarrow 7x+24y-4 = 0$ ⑤ [30]

Scanned by CamScanner

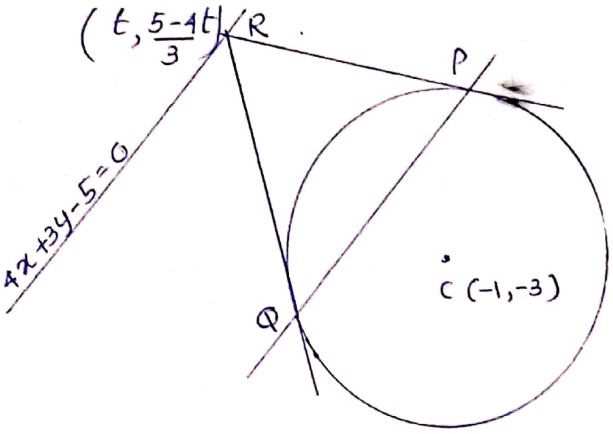
(03) $S: x^2+y^2+2x+6y+1=0$

කේන්ද්‍රය $(-1,-3)$ ⑤ අරය $\sqrt{1^2+3^2-1} = 3$ ⑤

$(-1,-3)$ සිට $4x+3y-5=0$ ට ලම්බ දුර l,

$$l = \frac{|4(-1)+3(-3)-5|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|-18|}{5} = \frac{18}{5}$$ ⑤

අරය ⑤ $< l$ $\therefore$ ඡේදනය නොවේ. ⑤ 30



ඒ අන් සරල රේඛාව මත අඳුළි ලක්ෂ්‍යය $\left(t, \frac{5-4t}{3}\right)$ ⑤ ලෙස ගනිමු.

t පරාමිතියකි.

R සිට ආන්තයට ඇඳි ස්පර්ශක වල ස්පර්ශ ජ්‍යාය PQ වේ.

$\therefore$ PQ: $x.t+y\left(\frac{5-4t}{3}\right)+(x+t)+3\left(y+\frac{5-4t}{3}\right)+1=0$ ⑤

$3tx+5y-4ty+3x+3t+9y+15-12t+3=0$

$3x+14y+18+t(3x-4y-9)=0$ ⑤

මෙය $l_1+\lambda l_2=0$ ආකාරය වේ. ⑤

$\therefore$ මෙය අවල ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යයි.

එම අවල ලක්ෂ්‍යය $3x+14y+18=0$ හා $3x-4y-9=0$ සරල රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වේ. ⑤

$18y=-27 \Rightarrow y=-3/2$ ⑤

$3x-4(-3/2)-9=0 \Rightarrow 3x+6-9=0 \Rightarrow x=1$ ⑤

$\therefore$ අවල ලක්ෂ්‍යය $(1,-3/2)$ ⑤ 40

Scanned by CamScanner

(04) $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{n+1}$ බව.

L.H.S R.H.S

$n=1$ විට $L.H.S = \frac{1}{1\,2} = \frac{1}{2}$, $R.H.S = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S

$\therefore$ $n=1$ ට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. (5)

$n=p$ විට සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

$\therefore \sum_{r=1}^{p} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{p}{p+1}$ (5)

$n=p+1$ විට $L.H.S = \sum_{r=1}^{p+1} \frac{1}{r(r+1)}$ (5)

$= \sum_{r=1}^{p} \frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{(p+1)(p+1+1)}$

$= \frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)}$

$= \frac{1}{(p+1)}\left[\frac{p^2+2p+1}{p+2}\right] = \frac{(p+1)^2}{(p+1)(p+2)}$

$= \frac{p+1}{p+1+1}$ (5)

$= R.H.S$

$\therefore$ $n=p$ ට සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කළ විට $n=p+1$ ටද සත්‍ය වේ. $\therefore$ ග.අ.මූ.ප අනුව සියළු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. (5)

25

Scanned by CamScanner

(05) $\sum_{r=1}^{n} r.r! = (n+1)! - 1$ බව.

L.H.S. R.H.S.

$n = 1$ විට $L.H.S = 1.1! = 1$

$R.H.S = (1+1)! - 1 = 1$

$\therefore L.H.S = R.H.S.$ —— (1) (5)

$n = p$ සඳහා පැවතී යැයි උපකල්පනය කරමු.

$$\sum_{r=1}^{p} r.r! = (p+1)! - 1 \quad \text{—— (2)} \quad (5)$$

$n = p+1$ විට

$$L.H.S = \sum_{r=1}^{p+1} r.r!$$

$$= \sum_{r=1}^{p} r.r! + (p+1)(p+1)! \quad (5)$$

$$= (p+1)! - 1 + (p+1)(p+1)!$$

$$= (p+1)!(1 + p + 1) - 1$$

$$= (p+1)!(p+2) - 1$$

$$= (p+2)! - 1$$

$$= (\overline{p+1} + 1)! - 1 \quad (5)$$

$$= R.H.S$$

$\therefore n = p+1$ ට ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. — (3)

(1), (2) හා (3) න් ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. (5)

Scanned by CamScanner